النهايات

1) نهايات الدوال المرجعية في الصفر

- $\lim_{x \to 0} x = 0$
- $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$
- $\lim_{x \to 0} x^3 = 0$

2) النهاية المنعدمة لدالة عددية في الصفر

نقول إن دالة عددية f ، معرفة على مجال منقط مركزه الصفر ، تؤول إلى الصفر عندما يؤول x إلى الصفر إذا كانت $f(x)$ تقترب من الصفر كلما اقترب x من الصفر ، و نكتب $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

3) النهاية المنتهية في نقطة

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ تكافئ $\lim_{x \to x_0} (f(x) - l) = 0$

- إذا كانت P دالة حدودية فإنه لكل x_0 من $\mathbb{R}$ ، لدينا : $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$
- إذا كانت R دالة حدودية فإنه لكل x_0 من مجموعة تعريفها ، لدينا : $\lim_{x \to x_0} R(x) = R(x_0)$

4) نهاية على اليمين ، نهاية على اليسار في نقطة

- الدوال المعرفة على يمين x_0 ، هي الدوال المعرفة على مجال من نوع $]x_0, a[$ حيث $a > x_0$.
- الدوال المعرفة على يسار x_0 ، هي الدوال المعرفة على مجال من نوع $]b, x_0[$ حيث $b < x_0$.

- نقول إن الدالة f تقبل النهاية l على اليمين في x_0 ، إذا كانت تنطبق على يمين x_0 مع دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 تكون نهايتها هي l عند x_0 .
و نكتب : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$ أو $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$
- لدينا تعريف مشابه بالنسبة للنهاية على اليسار في النقطة x_0 ، و نكتب $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l$ أو $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ تكافئ ($\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$)

5) النهاية المنتهية في $+\infty$ أو $-\infty$

نهايات مقلوبات الدوال المرجعية في $+\infty$ و $-\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

النهاية المنعدمة لدالة عددية في $+\infty$ أو $-\infty$

- نهاية f هي الصفر عندما يؤول x إلى $+\infty$ تعني أنه كلما كبر العدد x و كان موجبا كلما اقترب العدد $f(x)$ من الصفر . و نكتب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- نهاية f هي الصفر عندما يؤول x إلى $-\infty$ تعني أنه كلما كبرت القيمة المطلقة للعدد x و كان سالبا كلما اقترب العدد $f(x)$ من الصفر . و نكتب : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

النهاية المنتهية في $+\infty$ أو $-\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ تكافئ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - l\right) = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ تكافئ $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - l\right) = 0$

6) النهاية اللامنتهية في نقطة

النهايات اللامنتهية لدوال مرجعية

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$

النهاية اللامنتهية في نقطة

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ تعني أن عندما يقترب العدد x من x_0 فإن العدد $f(x)$ يصبح كبيرا

✓ إذا كان $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0^+$ فإن $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = +\infty$

✓ إذا كان $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0^-$ فإن $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = -\infty$

7) النهاية اللامنتهية في $+\infty$ أو $-\infty$

نهايات الدوال المرجعية في $+\infty$ أو $-\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

8) العمليات على النهايات

حالة النهايات المنتهية

إذا كان لدينا : $\lim_{x \to a} f(x) = l$ و $\lim_{x \to a} g(x) = m$ فإن :

- $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = l+m$
- $\lim_{x \to a} kf(x) = kl$
- $\lim_{x \to a} (f.g)(x) = l \times m$
- $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m} \quad (m \neq 0)$
- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m} \quad (m \neq 0)$

حالة النهايات اللامنتهية :

✓ **إذا كان لدينا :** $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ **فإن :**

- إذا كان $k > 0$ فإن : $\lim_{x \to a} kf(x) = +\infty$
- إذا كان $k < 0$ فإن : $\lim_{x \to a} kf(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

✓ إذا كان لدينا : $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ و كانت f موجبة فإن : $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

✓ إذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to a} g(x) = m$ فإن :

- $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = +\infty$
- إذا كان $m > 0$ فإن : $\lim_{x \to a} (f.g)(x) = +\infty$
- **إذا كان** $m < 0$ فإن : $\lim_{x \to a} (f.g)(x) = -\infty$

✓ إذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to a} (f.g)(x) = +\infty$

- نهاية دالة حدودية بجوار ما لانهاية هي نهاية حدها الأعلى درجة أي :
  $\lim_{|x| \to +\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0 = \lim_{|x| \to +\infty} a_n x^n$ مع $(a_n \neq 0)$
- نهاية دالة جذرية بجوار ما لانهاية هي نهاية خارج حديها الأعلى درجة
- الكتابة $|x| \to +\infty$ تعني $x \to +\infty$ أو $x \to -\infty$

9) الأشكال الغير المحددة

- الكتابات التالية : "$\frac{0}{0}$" أو "$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$" أو "$0\times(\pm\infty)$" أو "$(-\infty)+(+\infty)$" تسمى أشكال غير محددة
- في حالة الحصول على شكل غير محدد فإننا نلجأ إلى تغيير طريقة حساب النهاية و غالبا ما نقوم إما بالتعميل أو النشر أو الضرب في المرافق .